NGUYỄN ĐÌNH TRÍ (Chủ biên)
TẠ VĂN ĐĨNH - NGUYỄN HỒ QUỲNH

Bài tập
TOÁN CAO CẤP

Tập ba

Phép tính giải tích nhiều biến số

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

NGUYỄN ĐÌNH TRÍ (chủ biên)
TẠ VĂN ĐĨNH - NGUYỄN HỒ QUỲNH

Bài tập
TOÁN CAO CẤP

TẬP BA

PHÉP TÍNH GIẢI TÍCH NHIỀU BIẾN SỐ

(Tái bản lần thứ tám)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

LỜI NÓI ĐẦU

Quyển bài tập này trình bày lời giải của các bài tập đã ra trong quyển Toán học cao cấp tập ba, phép tính giải tích nhiều biến số. Một số bài tập khác đã được bổ sung vào.

Như chúng ta đã biết, trong học toán, giữa việc hiểu sâu sắc lý thuyết và làm thành thạo các bài tập có một mối quan hệ mật thiết. Chính trong quá trình học lý thuyết rồi làm các bài tập, từ những bài tập vận dụng đơn giản lý thuyết đến những bài tập ngày càng khó hơn, chúng ta dần dần hiểu được các khái niệm toán học mới, nắm được các phương pháp cơ bản, nhớ được các kết quả cơ bản.

Đối với các bạn sinh viên dùng quyển sách này, chúng tôi khuyên các bạn hãy tự mình giải các bài tập đã ra trong giáo trình và chỉ xem lời giải trong quyển sách này để kiểm tra lại, tự mình đánh giá kết quả học tập của mình. Mong rằng quyển sách này giúp các bạn học tốt hơn và tìm được những lời giải hay hơn.

Quyển sách này viết lần đầu nên không tránh khỏi các sai sót. Chúng tôi mong nhận được ý kiến đóng góp của độc giả. Xin chân thành cảm ơn.

CÁC TÁC GIẢ

Chương I
HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

A – ĐỀ BÀI

1. Tìm miền xác định của các hàm số sau

a) $f(x, y) = \ln xy$; b) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x + y}} + \frac{1}{\sqrt{x - y}}$

c) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$;

d) $f(x, y) = \arcsin \frac{y - 1}{x}$; e) $f(x, y) = \sqrt{x \ln y}$

f) $f(x, y) = \frac{1}{y - x^2}$; g) $f(x, y) = \ln x + \ln \sin y$;

h) $f(x, y) = \frac{x}{\cos^2 y}$; i) $f(x, y) = \sqrt{y - x} \ln (y + x)$

2. Tìm giới hạn khi $(x, y) \to (0, 0)$ của các hàm số sau

a) $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$; b) $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$;

c) $f(x, y) = x \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$; d) $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$;

e) $f(x, y) = \frac{1 + x^2 + y^2}{y^2} (1 - \cos y)$; f) $f(x, y) = \frac{x^{\alpha} y^{\beta}}{x^2 - xy + y^2}$,

$(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$

g) $f(x, y) = \frac{\sin x - \sin y}{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y}$; h) $f(x, y) = \frac{\sin x - \operatorname{sh} y}{\operatorname{sh} x - \sin y}$.

3. Tính các đạo hàm riêng cấp một của các hàm số sau

a) $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$; b) $f(x, y) = \ln (x + \sqrt{(x^2 + y^2)})$;

c) $f(x, y) = y^2\sin\frac{x}{y}$; d) $f(x, y) = \text{arctg}\,\frac{y}{x}$

e) $f(x, y) = \arcsin(x - 2y)$; f) $f(x, y) = \ln\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$

g) $f(x, y) = \text{arctg}\sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$; h) $f(x, y) = e^{xy}\cos x\sin y$

i) $f(x, y) = \ln(x + \ln y)$; j) $f(x, y) = x^{y^3}$ $(x > 0)$

k) $f(x, y, z) = x^{y^z}$ $(x > 0, y > 0)$; l) $f(x, y, z) = e^{xyz}\sin\frac{y}{z}$

m) $f(x, y, z) = e^{\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}}$; n) $f(x, y, z) = z\sin\frac{y}{x + z}$

4. Khảo sát sự liên tục của các hàm số sau và của các đạo hàm riêng cấp một của chúng

a) $$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{nếu } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

b) $$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{nếu } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

c) $$f(x, y) = \begin{cases} x\,\text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)^2 & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

d) $$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x\sin y - y\sin x}{x^2 + y^2} & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{nếu } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

5. Tính đạo hàm của các hàm số hợp sau

a) $z = e^{u^2 - 2v^2}$, $u = \cos x$, $v = \sqrt{x^2 + y^2}$;

b) $z = \ln(u^2 + v^2)$, $u = xy$, $v = \frac{x}{y}$;

c) $z = x^2\ln y$, $x = \frac{u}{v}$, $y = 3u - 2v$;

d) $z = ue^{v} + ve^{-u}$, $u = e^{x}, v = yx^2$;

e) $z = xe^{\frac{x}{y}}$, $x = \cos t$, $y = e^{2t}$

f) $z = x\sqrt{1 + y^2}$, $x = te^{2t}, y = e^{-t}$;

6. Chứng minh rằng

a) Hàm số $z = y\ln(x^2 - y^2)$ thỏa mãn phương trình

$$\frac{1}{x}z'_x + \frac{1}{y}z'_y = \frac{z}{y^2}$$

b) Hàm số $z = y^{\frac{y}{x}}\sin\frac{y}{x}$ thỏa mãn phương trình

$$x^2z'_x + xyz'_y = yz$$

7. Tìm hàm số $z = z(x, y)$ thỏa mãn phương trình

a) $2z'_x - z'_y = 0$, bằng phép đổi biến số

$$u = x + y, v = x + 2y$$

b) $xz'_x - yz'_y = x^2 - y^2$, bằng phép đổi biến số

$$u = x + y, v = xy$$

8. Tìm vi phân toàn phần của các hàm số

a) $z = \sin(x^2 + y^2)$; b) $z = e^{x}(\cos y + x\sin y)$

c) $z = \ln\mathrm{tg}\frac{y}{x}$; d) $z = \mathrm{arctg}\frac{x + y}{x - y}$

e) $z = e^{\frac{x}{y}} + e^{-\frac{y}{x}}$; f) $z = \int_x^y e^{t^2}dt$

g) $z = \int_{xy}^{\frac{x}{y}} t^2\cos 2t\,dt$; h) $u = y^2\sqrt{x^3} - 3y\sqrt[3]{z^2}$

i) $u = xe^{y} + ye^{z} + ze^{x}$; j) $u = x^{y^2z}$ $(x > 0)$

9. Dùng vi phân, tính gần đúng các số sau

a) $\sqrt[3]{(1,02)^2 + (0,05)^2}$; b) $\ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1)$

c) $\sqrt{9.(1,95)^2 + (8,1)^2}$; d) $\sqrt{\sin^2 1,55 + 8.e^{0,015}}$

e) $\operatorname{arctg} \frac{1,02}{0,95}$; f) $(\sqrt{99} - \sqrt[3]{124})^3$

10. Tính đạo hàm của các hàm số ẩn xác định bởi các phương trình sau:

a) $x^3y - y^3x = a^4$, tính y' ;

b) $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0$, tính y' ;

c) $\operatorname{arctg} \frac{x+y}{a} = \frac{y}{a}$, tính y' ;

d) $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, tính y', y'' ;

e) $y^5 + 3x^2y^2 + 5x^4 = 12$, tính y' ;

f) $2y^2 + \sqrt[3]{xy} = 3x^2 + 17$, tính y' ;

g) $3\sin \frac{\sqrt{x}}{y} - 2\cos \frac{\sqrt{x}}{y} + 1 = 0$, tính y' ;

h) $x + y + z = e^z$, tính z'_x, z'_y ;

i) $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$, tính z'_x, z'_y ;

j) $xy^2z^3 + x^3y^2z = x + y + z$, tính z'_x , z'_y ;

k) $xe^y + yz + ze^x = 0$, tính z'_x, z'_y ;

l) $xyz = \cos(x + y + z)$, tính z'_x , z'_y ;

m) $y^2ze^{x+y} - \sin(xyz) = 0$, tính z'_x, z'_y ;

n) $\arcsin \sqrt[3]{\frac{x^3 + y^3 - 3x^2y}{x^3 + y^3 - 3xy^2}} = a$, tính y' ;

11. a) $z = f(x, y)$ là hàm số ẩn xác định bởi hệ thức

$$z - xe^{\frac{z}{y}} = 0$$

Tính gần đúng f(0,02; 0,99)

b) Cho hàm số

$$u = \frac{x + z}{y + z},$$

trong đó z là hàm số ẩn xác định bởi hệ thức

$$ze^z = xe^x + ye^y$$

Tính u'_x, u'_y

c) $z = z(x, y)$ là hàm số ẩn xác định bởi hệ thức

$$z^2 + \frac{2}{x} = \sqrt{y^2 - z^2}$$

Chứng minh rằng

$$x^2 z'_x + \frac{1}{y} z'_y = \frac{1}{z}$$

d) $F(u, v)$ là một hàm số khả vi $z = z(x, y)$ là hàm số ẩn xác định bởi hệ thức

$$F(cx - az, cy - bz) = 0 \qquad (c \neq 0)$$

Chứng minh rằng

$$az'_x + bz'_y = c$$

e) $z = z(x, y)$ là hàm số ẩn xác định bởi hệ thức

$$x^2 + y^2 + z^2 = yf(\frac{z}{y}),$$

Trong đó f là một hàm số khả vi. Chứng minh rằng

$$(x^2 - y^2 - z^2)\, z'_x + 2xyz'_y = 2xz$$

f) Tính đạo hàm của các hàm số ẩn $y(x)$, $z(x)$ xác định bởi hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

g) $y = y(x)$ là hàm số ẩn xác định bởi hệ thức

$$x^3 + y^3 - 3xy - 1 = 0.$$

Tìm khai triển hữu hạn đến cấp 3 của y(x) ở lân cận của điểm $x = 0$.

h) Tìm khai triển hữu hạn đến cấp 3 ở lân cận điểm $x = 0$ của hàm số $y = y(x)$ xác định bởi hệ thức

$$\operatorname{arctg}(xy) + 1 = e^{x+y}.$$

12. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của các hàm số sau

a) $f(x,y) = x^2y + x\sqrt{y}$; b) $f(x,y) = \sin(x+y) + \cos(x-y)$

c) $f(x,y) = \dfrac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3}$; d) $f(x, y) = x^2\ln(x + y)$

e) $f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$; f) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$

g) $f(x, y) = x^{\ln y}$; h) $f(x, y) = \cos(ax + e^y)$

13. Tính $f''_{xy}(0, 0)$ và $f''_{yx}(0, 0)$ nếu

a) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x+y} & \text{nếu } x \neq -y \\ 0 & \text{nếu } x = -y \end{cases}$$

b) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - y^3x}{x^2+y^2} & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{nếu } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

14. a) Tìm hàm số u(x, y) thỏa mãn phương trình $u''_{xy} = 0$

b) Tìm hàm số u(x, y) thỏa mãn phương trình $u''_{x^2} = 0$

c) Tìm hàm số u(x, y, z) thỏa mãn phương trình $u'''_{xyz} = 0$

d) Tìm hàm số u(x, y), biết rằng

$u''_{xx} = 12x^2y + 2$, $u'_y = x^4 - 30xy^5$, $u(0, 0) = 1$, $u(1, 1) = -2$

e) Tìm hàm số u(x, y), biết rằng

$$u'_x = x^2 - 2xy^2 + 3,\ u'_y = y^2 - 2x^2y + 3$$

f) Tìm hàm số u(x, y) biết

$$u'_x = \frac{(3x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{x^2y},\ u'_y = \frac{(3y^2 - x^2)(x^2 + y^2)}{xy^2}$$

15. a) Chứng minh rằng hàm số $u(x, y) = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ thỏa mãn phương trình

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

(phương trình Laplace trong không gian $\mathbf{R}^2$)

b) Chứng minh rằng hàm số $u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ thỏa mãn phương trình

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

(phương trình Laplace trong $\mathbf{R}^3$).

c) Cùng câu hỏi như câu b) với hàm số

$$u(x, y, z) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \operatorname{arctg}\frac{z}{y} + \operatorname{arctg}\frac{x}{z}$$

d) Tìm hàm số u(x, y, z) có dạng $u = f(r)$, trong đó $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, sao cho

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

16. Chứng minh rằng hàm số $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$, trong đó f là một hàm số có đạo hàm cấp hai liên tục, thỏa mãn phương trình

$$z''_{x^2}\, z''_{y^2} = (z''_{xy})^2.$$

17. a) Chứng minh rằng hàm số